ISSN: 0798-1015

REVISTA ESPACIOS

Educación • Education • Educação • Vol. 41 (26) 2020 • Art. 30

Recibido/Received: 21/05/2020 • **Aprobado**/Approved: 02/07/2020 • **Publicado**/Published: 16/07/2020

Educación matemática realista y entornos interactivos para determinar el nivel cognitivo de estudiantes universitarios a partir del concepto de la integral definida y sus aplicaciones en ingeniería

Realistic Mathematical Education and Interactive Environments to determine the cognitive level of university students from the concept of the defined Integral and its applications in engineering

RIVEROS, Fernando[1]
VARGAS, Javier[2]
PARRA, Lina[3]

Resumen
El artículo presenta los resultados de una investigación cuyo propósito fue determinar los niveles cognitivos de los estudiantes de ingeniería. El estudio se realizó desde la Educación Matemática Realista, la articulación con Entornos Interactivos y la integral definida y sus aplicaciones en ingeniería. Los instrumentos construidos se validaron con una confiabilidad del 95%. Se determinó que el 30% de los estudiantes se encuentran en el nivel Relacional, el 60% en el nivel multiestructural, y el 10% en el nivel uniestructural.
Palabras clave: educación matemática realista, taxonomía solo, niveles cognitivos, enseñanza de las matemáticas

Abstract
The article presents the results of a research whose purpose was to determine the cognitive levels of engineering students. The study was carried out from the Realistic Mathematical Education, the articulation with Interactive Environments and the defined integral and its applications in engineering. The instruments built were validated with 95% reliability. It was determined that 30% of the students are in the Relational level, 60% in the multi-structural level, and 10% in the unistructural level
key words: realistic mathematical education, taxonomy solo, cognitive levels, teaching of mathematics

1. Introducción

Dada la dificultad propia del proceso enseñanza y aprendizaje de la matemática en todo nivel, especialmente en educación superior y en los programas de ingeniería, en los cuales los estudiantes presentan resultados de altos índices de repitencia y fracaso escolar en su primer año, como lo señala el Sistema para la Prevención y Análisis

[1] Doctorando En Educación – Universidad Católica de Manizales. Profesor Investigador Grupo Macrypt. Universidad de los Llanos. friveros@unillanos.edu.co
[2] Doctor En ciencias de la Educación – Investigador Asociado – MINCIENCIA. Profesor Investigador.Javier.andres.vargas@unillanos.edu.co
[3] Doctora en Educación. Investigadora Grupo de Investigación ALFA. Universidad Católica de Manizales. lrparra@ucm.edu.co

de la Deserción en las Instituciones de Educación Superior en Colombia SPADIES (2016), surge la necesidad de hacer un rastreo documental sobre el proceso enseñanza y aprendizaje de los contenidos de la matemática en este nivel universitario, y específicamente el constructo matemático integral definida y aplicaciones, tanto a nivel nacional como de fuentes internacionales que hayan realizado investigaciones al respecto, teniendo en cuenta aspectos cognitivos de representaciones semióticas, entornos interactivos y modelos de competencia, además, de las dificultades didácticas y obstáculos epistemológicos presentes en el proceso de aprendizaje Artigue (1998); Depool (2004) y Vanegas (2013).

Por lo anterior, fue necesario realizar un estudio exploratorio el cual permitió conocer el desarrollo de las investigaciones relacionadas con la utilización de entornos interactivos en relación con utilización de los software educativos en matemáticas como apoyo en el aprendizaje del concepto de Integral Definida en Matemáticas para ingeniería, así como una revisión documental sobre uso de los CAS Computer Algebra Systems (Sistemas de algebra computacional) integrados a la educación matemática en educación superior, como en (Buteau et al., 2010). Y en preferencias sobre campos de la investigación en didáctica de las matemáticas en el ámbito internacional (Bracho et al., 2014), debido a la importancia que resulta, el conocer qué se ha hecho y qué se está haciendo al respecto en otros países o en otras regiones del mundo.

La Educación Matemática Realista (EMR) es una teoría específica de instrucción para la educación matemática, centrada en dominios, Gravemeijer & Terwel (2000). Debido a la necesidad imperante en la época a nivel mundial de reformar la enseñanza de las matemáticas nace en Holanda. Freudenthal coloca los primeros cimientos en la década del 70, mencionó que si la matemática es un acto humano, entonces debe tener relación con la realidad y ser relevantes para la sociedad como también usar contextos realistas los cuales son primordiales para este enfoque de educación matemática realista.

Además, se conceptualizó con lo planteado por Freudenthal (1991) quien propuso como idea fundamental en esta teoría que las matemáticas son una actividad humana y la organización de la realidad con medios matemáticos y hasta a la matemática misma la denominó matematización. Se trata de ver las matemáticas como una actividad de resolver problemas y también de proponerlos desde los mismos contextos, y no ser vista solo como un conjunto de conocimientos, en otras palabras “No hay matemáticas sin matematización”. Y esa es la idea central de la educación matemática, es decir la, matematización. “las personas no deben aprender la matemática como un sistema cerrado, sino como una actividad humana: el proceso de matematizar la realidad con medios matemáticos incluso matematizar las matemáticas”. Cuando se transita del mundo de la vida hacia el mundo de los símbolos se denomina matematizar horizontalmente, y cuando se transita dentro del mundo de los símbolos se denomina matematizar verticalmente y fueron términos usados por Freudenthal (1991).

Así mismo, Godino (2012) argumenta que como en la mayoría de las aproximaciones a educación matemática, la EMR propone empoderar a los estudiantes para que usen su comprensión y herramientas matemáticas en la resolución de problemas. No empezar con abstracciones puntuales o definiciones que deben ser aplicadas posteriormente, sino comenzar con contextos ricos que demanden una organización matemática; contextos que puedan ser matematizados. De esta manera, mientras trabajan con problemas contextualizados, los estudiantes pueden desarrollar herramientas y comprensión matemática. Uno de los principios claves para la educación matemática de Freudenthal (1991) es que se debe dar a los estudiantes una oportunidad “guiada” para “re-inventar” las matemáticas.

Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers (2014) destacan la importancia de usar modelos dentro de esta teoría, en ella se caracterizan los distintos niveles de comprensión que es posible distinguir y que tipifican el proceso de aprendizaje, ¿cómo pueden los estudiantes desempeñar un papel activo en el desarrollo de modelos? Los estudiantes juegan un papel activo en el contexto del aula y en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Otra de las características que presenta la EMR es que utiliza niveles cognitivos o niveles de comprensión en los cuáles el estudiante va progresando hasta alcanzar el nivel de formalización matemática. Ellos son: nivel situacional, nivel referencial, nivel general y nivel formal. El progreso en los niveles es dado cuando la actividad en un nivel es analizada en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se transforma en objeto del posterior nivel (Freudenthal, 1973).

Investigaciones muestran la importancia de usar las representaciones semióticas por medio de las TIC en conjunto con la teoría EMR, Zaranis (2017), dado que el software matemático permite una mayor visualización en menor tiempo y de forma interactiva visualizando gráficamente funciones reales en la misma ventana, permitiendo así no solo el tratamiento entre sistemas de representación semiótica sino también la conversión entre los sistemas de representación simbólico y gráfico por ejemplo, pues esta conversión entre ellos es la que propicia la construcción y aprendizaje de los conceptos matemáticos, ya que no basta solo trabajar actividades dentro de un mismo sistema de representación (tratamiento), Duval (1999).

Otra categoría analizada en la investigación son los entornos interactivos, para los procesos cognitivos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La tecnología sobresale positivamente como un medio de muy alto valor, Gil & Guzmán (1993, p. 18) subrayan que al usar la tecnología se está permitiendo concentrar la atención en lo verdaderamente interesante de una temática determinada, pues no se desperdician recursos de tiempo y también desgaste de recursos en operaciones algorítmicas y tediosas o complejas que no enfocan la atención en lo que es verdaderamente importante y destacado de un objeto de estudio.

GeoGebra es un software libre de “entorno de geometría dinámica que permite aprovechar las nuevas posibilidades que brinda su recientemente incorporada vista gráfica 3D para mejorar la comprensión de los conceptos del cálculo diferencial e integral”, (Rio, 2016, p.12).

Como afirman Jiménez, J.G. & Jiménez, S. (2017, p. 13):

> Es un reto el desarrollar estrategias que despierten el interés del alumno por aprender; como resultado de éste análisis se concluye que GeoGebra es el software libre que proporciona una excelente opción para mejorar la actividad central de las matemáticas en la resolución de problemas, es una herramienta adecuada para utilizar como estrategia en la enseñanza de las ciencias exactas. Es de anotar que Geogebra es un CAS (Computer Algebra Systems).

Buteau et al. (2010) analizaron aproximadamente 326 artículos internacionales relacionados con el uso de los CAS en el proceso enseñanza y aprendizaje de matemáticas a nivel universitario, y evidenciaron que la gran mayoría están orientados hacia el uso de los CAS a nivel de secundaria, y muy poco porcentaje a nivel universitario. El campo de matemáticas universitarias más estudiado usando CAS en las investigaciones es el Cálculo (42%), le siguen el álgebra con (13%), Ecuaciones diferenciales (11%), Cálculo multivariables (10%), Algebra lineal (10%), matemáticas discretas (4%), geometría (3%) entre otros

2. Metodología

El diseño metodológico fue descriptivo e interpretativo, con un enfoque cualitativo. La muestra poblacional objeto de estudio estuvo conformada por 10 estudiantes de primer año de ingeniería de la asignatura cálculo integral del programa de Ingeniería Electrónica de la Universidad de los Llanos de la ciudad de Villavicencio, departamento del Meta, Colombia. Se utilizó la observación participante como técnica y se aplicaron instrumentos de percepción y de medición de nivel cognitivo. La estrategia diseñada consta de 3 momentos. El momento 1, se basó en la interacción con el profesor y apuntes interactivos proyectados visualmente, segundo momento, interacción con entornos interactivos de geogebra, Mathstudio y físicos como laboratorio de electrónica, finalmente el momento de evaluación se planteó un caso fundamentado en la teoría de Educación Matemática Realista (EMR), el cual se presenta en la tabla 1.

Tabla 1
Situaciones problemáticas

Caso Real: Red eléctrica	En el campo de la ingeniería eléctrica, la ingeniería electrónica, la ingeniería de sistemas, la ingeniería mecatrónica, la ingeniería de procesos y la ingeniería aeronáutica entre otras, se encuentra muchas veces con la siguiente situación en la que se necesita medir una señal de voltaje dada por la siguiente función v(t)=170Sen(wt) voltios, donde w corresponde a la frecuencia (w=2πf) con f=60 hz, es decir, la señal de voltaje de la red (aunque también puede ser una señal de mayor potencia) que entrará a alimentar un sistema. Se dispone de un multímetro digital en la función de voltaje promedio, y el valor que presenta la medición es: 0 (cero) voltios.

Fuente: Los Autores

Para la evaluación cognitiva de los estudiantes, se elaboró una rúbrica con base en la taxonomía propuesta por Biggs y Collins (1982). La tabla 2, presenta la rúbrica construida para medir los niveles cognitivos de los estudiantes de ingeniería frente al concepto de la Integral definida y sus aplicaciones en ingeniería.

Tabla 2
Rúbrica elaborada para la medición de los niveles cognitivos respecto al concepto de la integral definida y sus aplicaciones en ingeniería

PROBLEMAS PLANTEADOS	Escala de calificación				
	Pre estructural 1.0	Uniestructural 2.0	Multiestructura l 3.0	Relacional 4.0	Abstracción Ampliada 5.0
Domina el concepto de integral definida y una de sus aplicaciones en ingeniería	El estudiante no reconoce ni identifica el concepto de integral definida (1.0)	Identifica la solución a una problemática planteada del contexto de la ingeniería mediante la aplicación del concepto de integral definida. (1.2)	Combina diferentes técnicas para solucionar la problemática haciendo uso de métodos de integración. (2.2)	Argumenta sobre la solución encontrada al problema ingenieril desde el concepto de la integral definida. (3.2)	Crea maneras de relacionar herramientas matemáticas y entornos interactivos para solucionar problemas de ingeniería(.4.2)
		Nombra las variables que intervienen en el problema planteado. (1.4)	Describe la solución al problema planteado como el cálculo de la integral definida como el área bajo la curva.(2.4)	Contrasta las soluciones al problema planteado haciendo uso de los sistemas de representación semiótica. (3.4)	Formula una secuencia adecuada para desarrollar el procedimiento correcto en la solución pertinente de cada problemática. (4.4)
		Define la función que representa el fenómeno físico presente en el problema planteado del contexto ingenieril (1.6)	Enumera algunos pasos a seguir en el procedimiento para solución de la problemática planteada. (2.6)	Explica la importancia de los sistemas de representación semiótica para dar solución a problemas de la ingeniería desde el concepto de la integral definida. (3.6)	Genera una metodología que aporte a la solución de problemas ingenieriles desde el concepto de la integral definida. (4.6)
		Realiza un procedimiento básico con las	Analiza el problema propuesto y plantea una alternativa de	Relaciona diferentes variables presentes en los problemas	Reflexiona sobre la posibilidad de organizar la realidad

PROBLEMAS PLANTEADOS	Escala de calificación				
	Pre estructural 1.0	Uniestructural 2.0	Multiestructura l 3.0	Relacional 4.0	Abstracción Ampliada 5.0
		técnicas de integración (1.8)	solución adecuada. (2.8)	planteados de acuerdo a su realidad y dependencia.(3.8)	con medios matemáticos incluida la matemática misma (4.8)
		Calcula el valor de la integral de la función objeto de estudio planteada como solución al problema de aplicación en ingeniería (2.0)	Aplica un procedimiento para dar una solución adecuada al problema planteado. (3.0)	Justifica el uso de herramientas matemáticas y entornos interactivos en la solución de los problemas reales planteados. (4.0)	Teoriza que el concepto de integral definida es indispensable para explicar fenómenos físicos en contextos reales de la ingeniería(5.0)

Fuente: Los Autores

Así mismo, se elaboró y validó un instrumento con el propósito de medir la percepción que usted tiene respecto a su nivel cognitivo relacionado con el concepto de la integral definida y sus aplicaciones en la ingeniería. La tabla 3, presenta el instrumento de percepción elaborado, constituido por 20 items y una escala Likert de cinco (5) numerales.

Tabla 3
Encuesta de percepción de los niveles cognitivos en estudiantes de ingeniería con respecto del concepto de integral definida y aplicaciones

Responda según su percepción de 1 a 5 los siguientes aspectos: (1 Bajo, 2 Regular, 3 Aceptable, 4 Bueno, 5 Alto)						
Item	**Concepto**	1	2	3	4	5
1	Identifica la solución a una problemática planteada del contexto de la ingeniería mediante el concepto de integral definida.					
2	Nombra las variables que intervienen en el problema planteado.					
3	Define la función que representa el fenómeno físico presente en el problema planteado del contexto ingenieril					
4	Realiza un procedimiento básico con las técnicas de integración					
5	Calcula el valor de la integral de la función objeto de estudio planteada como solución al problema de aplicación en ingeniería					
6	Combina diferentes técnicas para solucionar la problemática haciendo uso de métodos de integración.					
7	Describe la solución al problema planteado como el cálculo de la integral definida como el área bajo la curva.					
8	Enumera algunos pasos a seguir en el procedimiento para solución de la problemática planteada.					
9	Analiza el problema propuesto y plantea una alternativa de solución adecuada					
10	Aplica un procedimiento para dar una solución adecuada al problema planteado					
11	Argumenta sobre la solución encontrada al problema ingenieril desde el concepto de la integral definida					
12	Contrasta las soluciones al problema planteado haciendo uso de los sistemas de representación numérica y gráfica por ejemplo.					
13	Explica la importancia de los sistemas de representación numérica, simbólica o gráfica para dar solución a problemas de la ingeniería desde el concepto de la integral definida					
14	Relaciona diferentes variables presentes en los problemas planteados de acuerdo a su realidad y dependencia.					
15	Justifica el uso de herramientas matemáticas y entornos interactivos en la solución de los problemas reales planteados					
16	Crea maneras de relacionar herramientas matemáticas y entornos interactivos para solucionar problemas de ingeniería.					
17	Formula una secuencia adecuada para desarrollar el procedimiento correcto en la solución pertinente de cada problemática					

Responda según su percepción de 1 a 5 los siguientes aspectos: (1 Bajo, 2 Regular, 3 Aceptable, 4 Bueno, 5 Alto)						
Item	**Concepto**	1	2	3	4	5
18	Genera una metodología que aporte a la solución de problemas ingenieriles desde el concepto de la integral definida.					
19	Reflexiona sobre la posibilidad de organizar la realidad con medios matemáticos incluida la matemática misma					
20	Teoriza que el concepto de integral definida es indispensable para explicar fenómenos físicos en contextos reales de la ingeniería					

Fuente: Los Autores

Respecto la validación del instrumento se realizó mediante la evaluación de expertos y la confiabilidad mediante el cálculo del coeficiente de Alfa Cronbach, en la tabla 4, se presenta los resultados obtenidos en la validación del instrumento con un coeficiente de alfa Cronbach de 0,95 lo que indica que es un instrumento altamente confiable.

Tabla 4
Resultados de Confiabilidad del instrumento basado en Alfa Cronbach

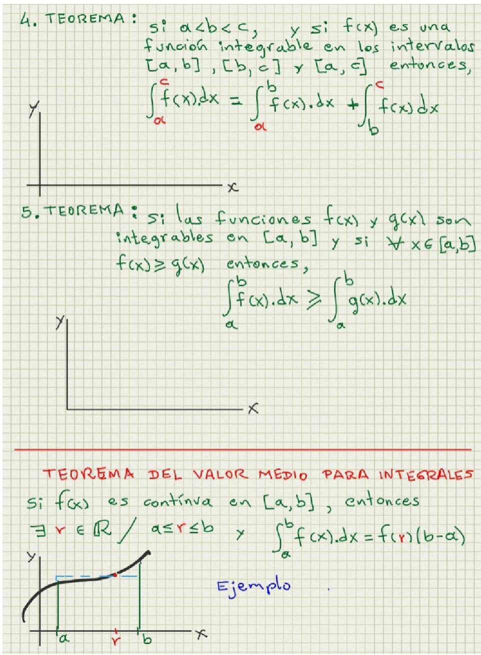
Sujeto	**Item**																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	3	3	2	3	2	3	4	1	2	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	1
2	4	3	1	4	3	3	4	2	2	3	2	1	2	1	1	2	2	2	2	1
3	3	4	3	4	3	3	3	4	3	4	3	1	3	1	1	2	1	2	1	1
4	5	4	3	4	4	4	4	3	3	3	3	2	1	1	1	1	1	2	1	1
5	1	2	3	4	4	4	3	2	2	4	2	2	3	1	2	1	1	3	2	1
6	4	5	5	4	4	4	4	4	4	3	2	2	3	2	2	2	2	3	1	1
7	3	3	3	5	4	4	3	4	4	4	3	2	3	2	2	2	2	3	2	2
8	4	4	3	5	4	4	5	5	4	4	5	3	3	2	2	3	2	3	2	2
9	4	5	4	5	4	5	5	4	4	5	3	3	4	3	2	3	2	3	3	3
10	4	3	3	5	5	4	5	5	4	4	4	4	5	3	3	3	4	3	3	3
11	5	5	4	5	5	5	5	4	4	4	3	1	4	4	3	5	4	4	3	4
Coeficiente de Alfa Cronbach	0.95																			

Fuente: Los Autores

3. Resultados

La intervención se realizó a un grupo de estudiantes de ingeniería electrónica de la Universidad de los Llanos, en Villavicencio Meta Colombia. Para esto se elaboró un material interactivo con apariencia de apuntes del profesor para ser proyectado como un recurso visual y apoyado del entono interactivo de Geogebra. La figura 1, presenta los apuntes desarrollados en el teorema del valor medio para integrales y la definición del valor promedio.

Figura 1 (a)
Enunciado del teorema del valor medio para integrales.


4. TEOREMA: si $a<b<c$, y si $f(x)$ es una función integrable en los intervalos $[a,b]$, $[b,c]$ y $[a,c]$ entonces,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x).dx + \int_b^c f(x)dx$$

5. TEOREMA: si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$ y si $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \geq g(x)$ entonces,

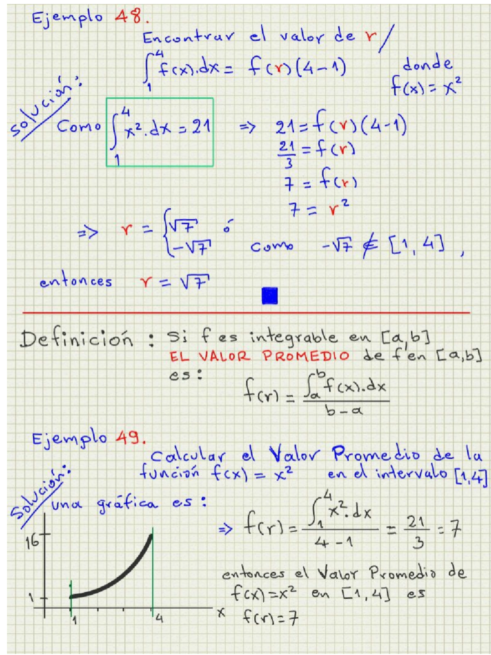
$$\int_a^b f(x).dx \geq \int_a^b g(x).dx$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

si $f(x)$ es contínua en $[a,b]$, entonces $\exists\, r \in \mathbb{R} \,/\, a \leq r \leq b$ y $\int_a^b f(x).dx = f(r)(b-a)$

Ejemplo

Figura 1 (b)
Ejemplo del valor medio para integrales y definición del valor promedio de una función


Ejemplo 48.

Encontrar el valor de r / $\int_1^4 f(x).dx = f(r)(4-1)$ donde $f(x)=x^2$

Solución: Como $\boxed{\int_1^4 x^2.dx = 21}$ $\Rightarrow$ $21 = f(r)(4-1)$

$\frac{21}{3} = f(r)$

$7 = f(r)$

$7 = r^2$

$\Rightarrow r = \begin{cases}\sqrt{7} \\ -\sqrt{7}\end{cases}$ ó como $-\sqrt{7} \notin [1,4]$,

entonces $r = \sqrt{7}$

Definición: si f es integrable en $[a,b]$ EL VALOR PROMEDIO de f en $[a,b]$ es:

$$f(r) = \frac{\int_a^b f(x).dx}{b-a}$$

Ejemplo 49.

Calcular el Valor Promedio de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[1,4]$

Solución: una gráfica es:

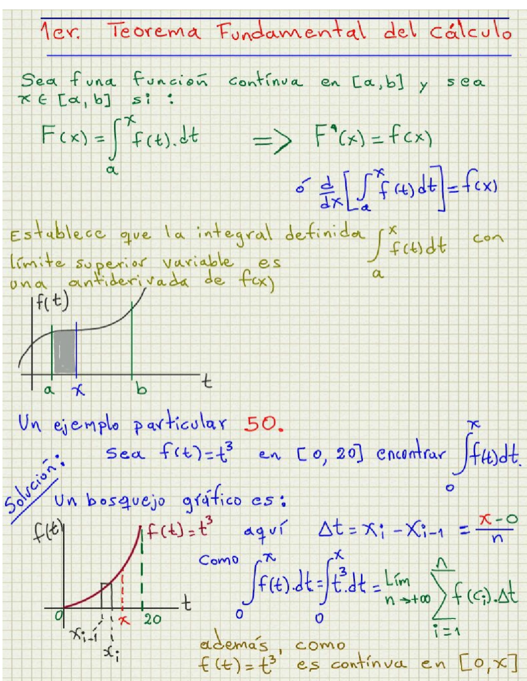
$$\Rightarrow f(r) = \frac{\int_1^4 x^2.dx}{4-1} = \frac{21}{3} = 7$$

entonces el Valor Promedio de $f(x)=x^2$ en $[1,4]$ es $f(r)=7$

Elaboración propia

Así mismo, la figura 2, presenta el 1er Teorema fundamental del cálculo y la respectiva demostración. La figura 3, presenta un taller propuesto y finalmente la figura 4, presenta la Definición de área bajo la curva de una función con ejemplos y Taller propuesto.

Figura 2 (c)
Enunciado del 1er. Teorema Fundamental del Cálculo


1er. Teorema Fundamental del cálculo

Sea f una función contínua en $[a,b]$ y sea $x \in [a,b]$ si:

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

ó $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$

Establece que la integral definida $\int_a^x f(t)dt$ con límite superior variable es una antiderivada de $f(x)$

Un ejemplo particular 50.

Sea $f(t)=t^3$ en $[0,20]$ encontrar $\int_0^x f(t)dt$.

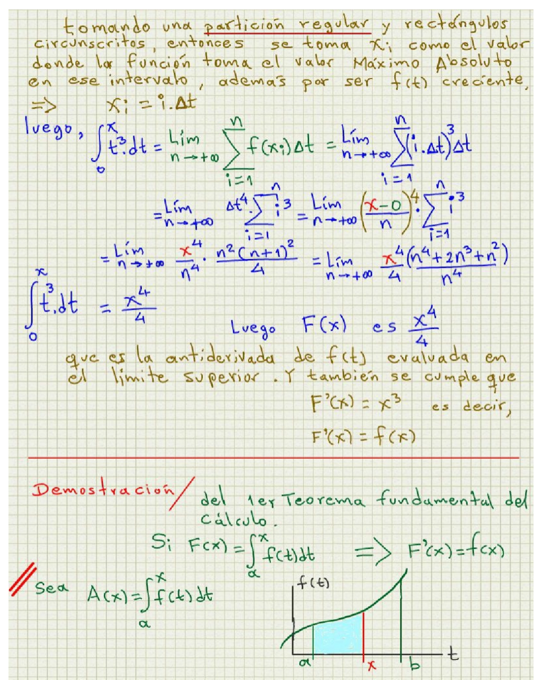
Solución: Un bosquejo gráfico es:

$f(t)=t^3$ aquí $\Delta t = x_i - x_{i-1} = \frac{x-0}{n}$

Como $\int_0^x f(t).dt = \int_0^x t^3.dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i).\Delta t$

además, como $f(t)=t^3$ es contínua en $[0,x]$

Figura 2 (d)
Demostración. Teorema Fundamental del Cálculo


tomando una partición regular y rectángulos circunscritos, entonces se toma x_i como el valor donde la función toma el valor Máximo Absoluto en ese intervalo, además por ser $f(t)$ creciente,

$\Rightarrow x_i = i.\Delta t$

luego, $\int_0^x t^3.dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n (i.\Delta t)^3 \Delta t$

$= \lim_{n\to+\infty} \Delta t^4 \sum_{i=1}^n i^3 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x-0}{n}\right)^4 \sum_{i=1}^n i^3$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{x^4}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^4}{4} \frac{(n^4+2n^3+n^2)}{n^4}$

$\int_0^x t^3.dt = \frac{x^4}{4}$ Luego $F(x)$ es $\frac{x^4}{4}$

que es la antiderivada de $f(t)$ evaluada en el límite superior. Y también se cumple que $F'(x) = x^3$ es decir, $F'(x) = f(x)$

Demostración / del 1er Teorema fundamental del cálculo.

Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Sea $A(x) = \int_a^x f(t)dt$

Figura 2 (e)
Demostración. Teorema Fundamental del Cálculo

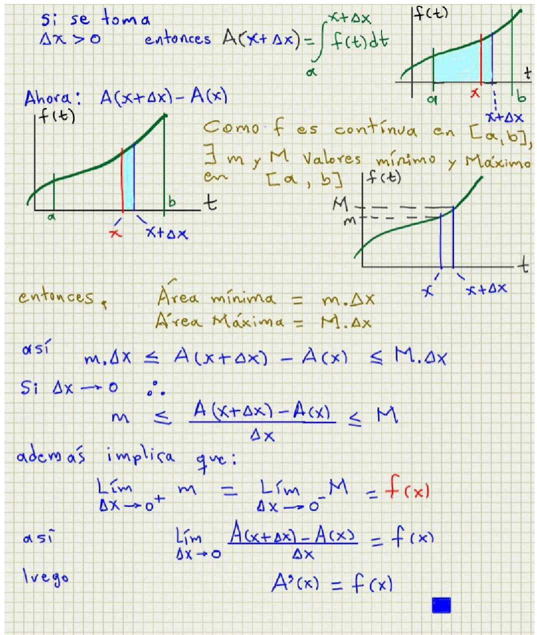


Figura 3 (f)
Enunciado y demostración segunda forma del Teorema Fundamental del Cálculo

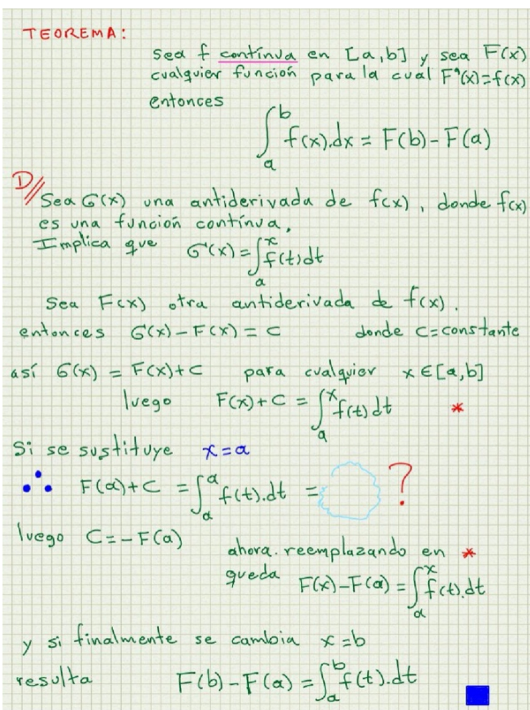


Figura 3 (g)
Ejemplos

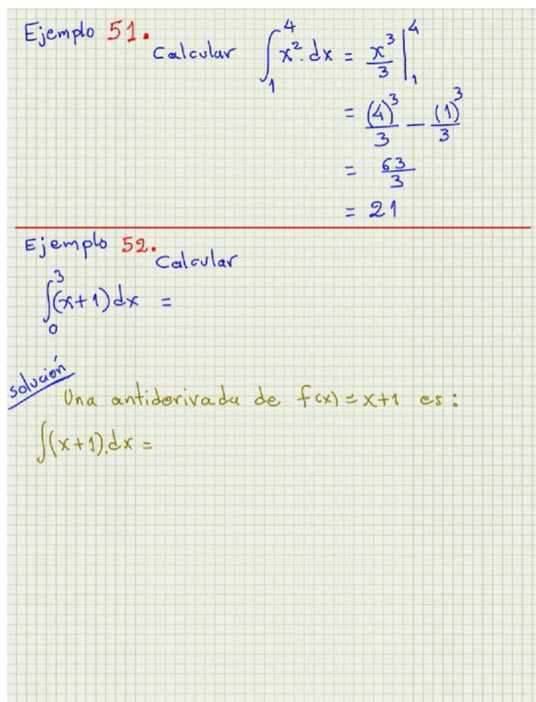


Figura 3 (h)
Taller propuesto

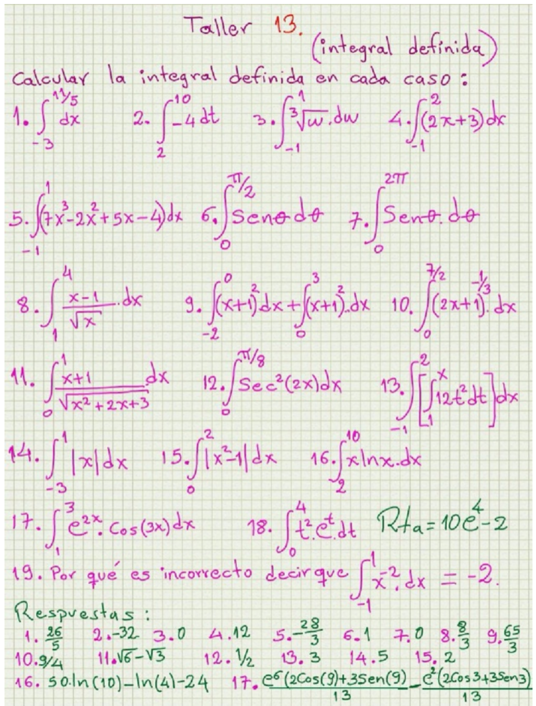

Taller 13. (integral definida)
Calcular la integral definida en cada caso:
1. $\int_{-3}^{1/5} dx$ 2. $\int_{2}^{-10} -4\,dt$ 3. $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{w}\,dw$ 4. $\int_{-1}^{2} (2x+3)\,dx$
5. $\int_{-1}^{1} (7x^3-2x^2+5x-4)\,dx$ 6. $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{Sen}\theta\,d\theta$ 7. $\int_{0}^{2\pi} \operatorname{Sen}\theta\,d\theta$
8. $\int_{1}^{4} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ 9. $\int_{-2}^{0} (x+1)^2 dx + \int_{0}^{3} (x+1)^2 dx$ 10. $\int_{0}^{7/2} (2x+1)^{-1/3} dx$
11. $\int_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$ 12. $\int_{0}^{\pi/8} \operatorname{Sec}^2(2x)\,dx$ 13. $\int_{-1}^{2} \left[\int_{1}^{x} 12t^2\,dt\right] dx$
14. $\int_{-3}^{1} |x|\,dx$ 15. $\int_{0}^{2} |x^2-1|\,dx$ 16. $\int_{2}^{10} x\ln x\,dx$
17. $\int_{1}^{3} e^{2x} \cdot \operatorname{Cos}(3x)\,dx$ 18. $\int_{0}^{4} t^2 e^t\,dt$ $Rta = 10e^4-2$
19. Por qué es incorrecto decir que $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = -2$.
Respuestas:
1. $\frac{26}{5}$ 2. -32 3. 0 4. 12 5. $-\frac{28}{3}$ 6. 1 7. 0 8. $\frac{8}{3}$ 9. $\frac{65}{3}$
10. $9/4$ 11. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ 12. $1/2$ 13. 3 14. 5 15. 2
16. $50\ln(10)-\ln(4)-24$ 17. $\frac{e^6(2\operatorname{Cos}(9)+3\operatorname{Sen}(9))}{13} - \frac{e^2(2\operatorname{Cos}3+3\operatorname{Sen}3)}{13}$

Figura 4 (i)
Definición de área bajo la curva de una función

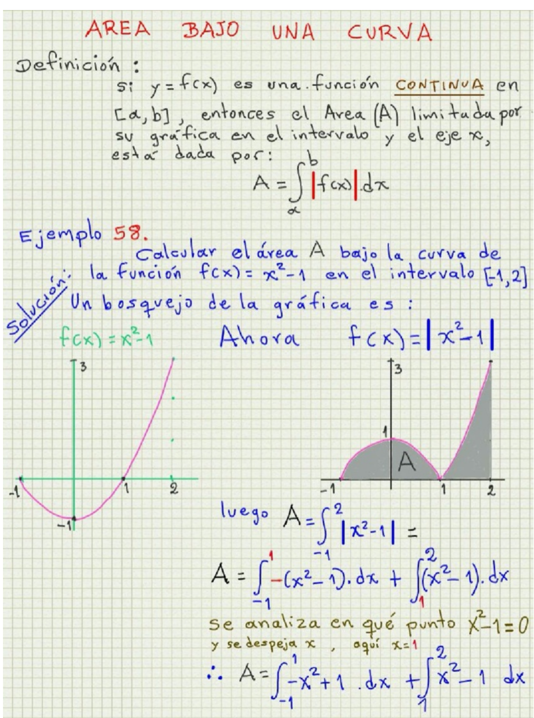
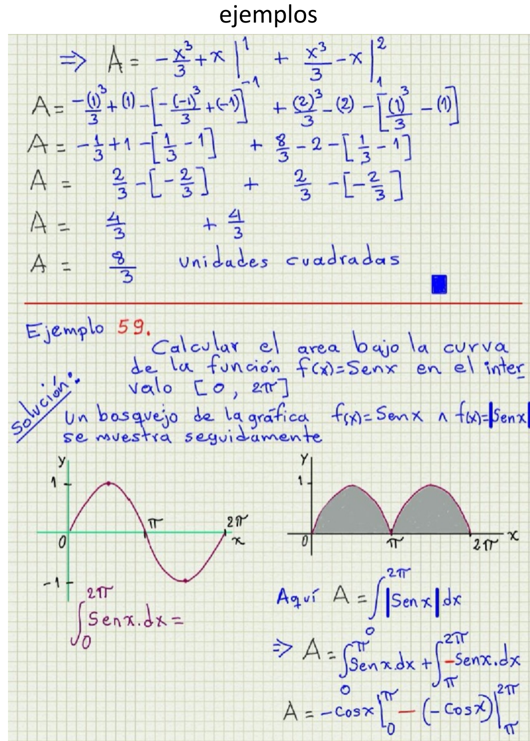
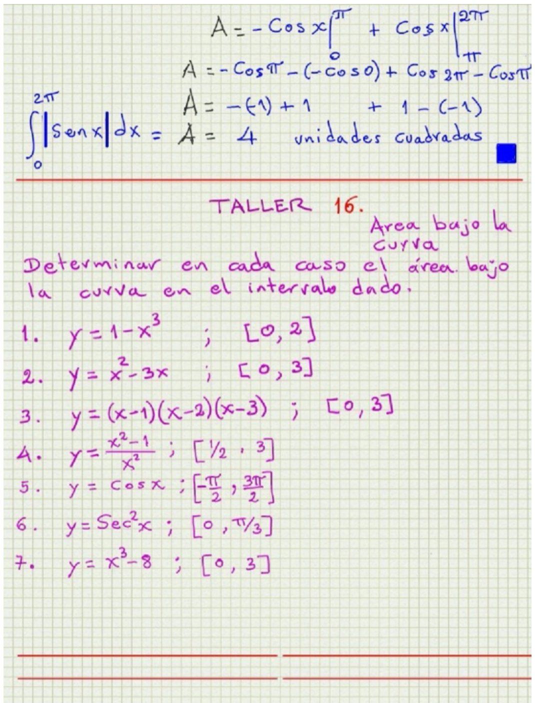

AREA BAJO UNA CURVA
Definición:
Si $y=f(x)$ es una función CONTINUA en $[a,b]$, entonces el Area (A) limitada por su gráfica en el intervalo y el eje x, está dada por:
$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$
Ejemplo 58.
Calcular el área A bajo la curva de la función $f(x)=x^2-1$ en el intervalo $[-1,2]$
Solución: Un bosquejo de la gráfica es:
$f(x)=x^2-1$ Ahora $f(x)=|x^2-1|$
luego $A = \int_{-1}^{2} |x^2-1| =$
$A = \int_{-1}^{1} -(x^2-1)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2-1)\,dx$
se analiza en qué punto $x^2-1=0$ y se despeja x, aquí $x=1$
$\therefore A = \int_{-1}^{1} -x^2+1\,dx + \int_{1}^{2} x^2-1\,dx$

Figura 4 (i)
Definición de área bajo la curva de una función con ejemplos


$\Rightarrow A = -\frac{x^3}{3}+x \Big|_{-1}^{1} + \frac{x^3}{3}-x \Big|_{1}^{2}$
$A = -\frac{(1)^3}{3}+(1) - \left[-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right] + \frac{(2)^3}{3}-(2) - \left[\frac{(1)^3}{3}-(1)\right]$
$A = -\frac{1}{3}+1-\left[\frac{1}{3}-1\right] + \frac{8}{3}-2-\left[\frac{1}{3}-1\right]$
$A = \frac{2}{3}-\left[-\frac{2}{3}\right] + \frac{2}{3}-\left[-\frac{2}{3}\right]$
$A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$
$A = \frac{8}{3}$ unidades cuadradas
Ejemplo 59.
Calcular el area bajo la curva de la función $f(x)=\operatorname{Sen}x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$
Solución: Un bosquejo de la gráfica $f(x)=\operatorname{Sen}x \wedge f(x)=|\operatorname{Sen}x|$ se muestra seguidamente
$\int_0^{2\pi} \operatorname{Sen}x\,dx =$
Aquí $A = \int_0^{2\pi} |\operatorname{Sen}x|\,dx$
$\Rightarrow A = \int_0^{\pi} \operatorname{Sen}x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{Sen}x\,dx$
$A = -\operatorname{Cos}x \Big|_0^{\pi} - (-\operatorname{Cos}x) \Big|_{\pi}^{2\pi}$

(k)



$$A = -\text{Cos}\,x\Big|_0^{\pi} + \text{Cos}\,x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$A = -\text{Cos}\,\pi - (-\text{Cos}\,0) + \text{Cos}\,2\pi - \text{Cos}\,\pi$$

$$\int_0^{2\pi} |\text{Sen}\,x|\,dx = A = -(-1) + 1 + 1 - (-1)$$

$$A = 4 \text{ unidades cuadradas}$$

TALLER 16.

Area bajo la curva

Determinar en cada caso el área bajo la curva en el intervalo dado.

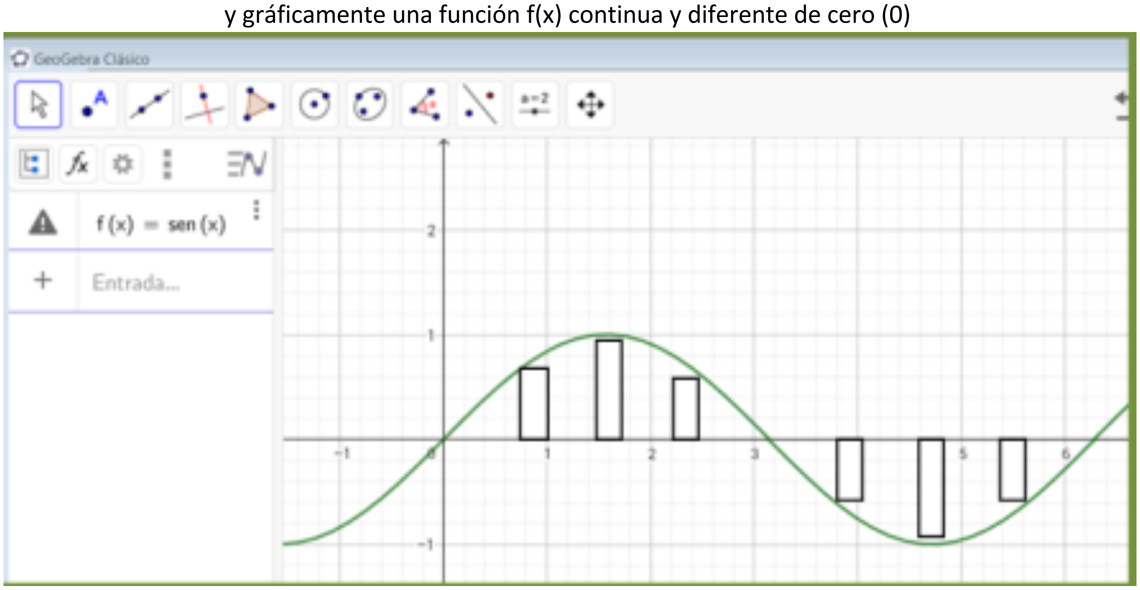
1. $y = 1 - x^3$; $[0, 2]$
2. $y = x^2 - 3x$; $[0, 3]$
3. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$; $[0, 3]$
4. $y = \frac{x^2-1}{x^2}$; $[1/2, 3]$
5. $y = \cos x$; $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
6. $y = \text{Sec}^2 x$; $[0, \pi/3]$
7. $y = x^3 - 8$; $[0, 3]$

Elaboración propia

Finalmente la figura 5, presenta la interacción con el software Geogebra, donde se describe simbólicamente y gráficamente la función objeto de estudio diferente de 0.

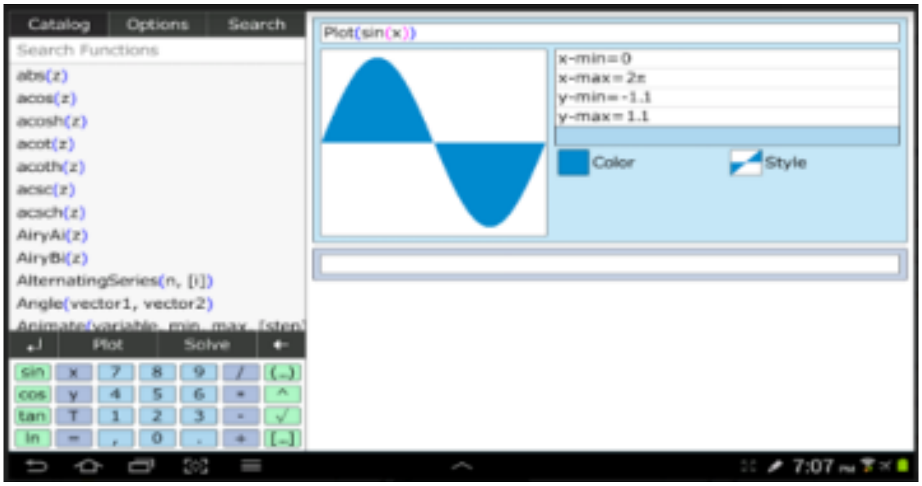
Figura 5

Uso de software geogebra por el estudiante E2 para describir simbólicamente y gráficamente una función f(x) continua y diferente de cero (0)



Así mismo, la interactividad realizada por el E3 se presenta en la figura 6. donde hace uso del entorno interactivo del software Mathstudio realizando la conversión de un sistema de representación simbólico a un sistema de representación gráfico.

Figura 6
Representación por parte del estudiante E3 de
una función sinusoide en el software *Mathstudio*



De igual manera, se utilizó la teoría de la EMR para la construcción de un estudio de caso real "En el campo de la ingeniería eléctrica, la ingeniería electrónica, la ingeniería de sistemas, la ingeniería mecatrónica, la ingeniería de procesos y la ingeniería aeronáutica entre otras, se encuentra muchas veces con la siguiente situación en la que se necesita medir una señal de voltaje dada por la siguiente función v(t)=170Sen(wt) voltios, donde w corresponde a la frecuencia (w=2πf) con f=60 hz, es decir, la señal de voltaje de la red (aunque también puede ser una señal de mayor potencia) que entrará a alimentar un sistema. Se dispone de un multímetro digital en la función de voltaje promedio, y el valor que presenta la medición es: 0 (cero) voltios".

Respecto al caso planteado, se analizó la situación explicativa que sucede si se obtiene una medida de 00.0 (cero) voltios ó también podrían ser 00.0 (cero) amperios el estudiante puede suponer una o varias explicaciones, determinando que el estudiante pueda llegar a las explicaciones presentadas en la tabla 5.

Tabla 5
Caso de estudio referido a situación problema 1 en EMR

Problema Realista	Posible Explicación de los estudiantes
En el campo de la ingeniería eléctrica, la ingeniería electrónica, la ingeniería de sistemas, la ingeniería mecatrónica, la ingeniería de procesos y la ingeniería aeronáutica entre otras, se encuentra muchas veces con la siguiente situación en la que se necesita medir una señal de voltaje dada por la siguiente función v(t)=170Sen(wt) voltios, donde w corresponde a la frecuencia (w=2πf) con f=60 hz, es decir, la señal de voltaje de la red (aunque también puede ser una señal de mayor potencia) que entrará a alimentar un sistema. Se dispone de un multímetro digital en la función de voltaje promedio, y el valor que presenta la medición es: 0 (cero) voltios. ¿Cuál es la explicación de que se obtenga Voltaje de la Red Eléctrica en cero voltios medidos con el multímetro?	A. Que no existe señal de voltaje o corriente B. Que el voltaje es muy mínimo C. Que el multímetro esté averiado D. No comprende el resultado de la medición E. Comprende el resultado, pero no lo puede explicar F. Desconozca la fundamentación física y matemática de esta medición G. Comprende la situación física y la explica matemáticamente. (Procede a la Medición mediante Rubrica)

Elaboración propia

Desde el concepto de la educación realista, el no tener claro el concepto de la integral definida puede ocasionar diagnósticos técnicos que ocasionan daños funcionales o laborales. Ahora bien, desde la educación matemática el estudiante debe conceptualizar que el fenómeno que se presenta proviene de una señal de voltaje o corriente periódica y sinusoide simétrica de amplitud máxima 170 voltios y una frecuencia f=1/T con (f=60 hz), donde T representa el período de la señal. También puede ser una señal cuadrada simétrica y periódica con respecto al eje del tiempo.

Con esta Situación Problema se puede elaborar una serie de preguntas y también un diagrama de flujo para lograr diagnosticar el nivel cognitivo en el cual se encuentran los estudiantes a los que se les hará la intervención incluso con entornos interactivos y fundamentados en la teoría de Educación Matemática Realista (EMR).

Por tanto, de acuerdo a la capacidad del estudiante de realizar la explicación y venciendo los obstáculos de aprendizaje, puede llegar a un aprendizaje en profundidad (Orrego et al., 2016). Para el caso particular, se realizó el análisis cognitivo mediante un instrumento elaborado y validado, el cual permite caracterizar el nivel cognitivo de los estudiantes.

Los datos obtenidos se presentan en la tabla 6, se observa que los estudiantes de E7 a E10, presentaron un nivel explicativo previo muy favorable, logrando detallar la situación matemática presente al caso realista. Esto equivale al 40% de los estudiantes, desde la percepción de los estudiantes se establece que el 50% son Relacionales, el 40% Multiestructurales y el 10% Uniestructurales. De igual manera, desde la Evaluación cognitiva el 30% son Relacionales, 60% Multiestructural, y el 10% es Uniestructural.

Tabla 6
Resultados de los niveles cognitivos de los estudiantes desde la percepción y la evaluación

				Rúbrica Basada En Taxonomía SOLO	
Estudiante	**Explicación Previa**	**Percepción del Nivel Cognitivo**	**Equivalente en SOLO**	**Cuantitativa**	**Cualitativa**
E1	A	2,0	Uniestructural	1.8	Uniestructural
E2	B	2,3	Multiestructural	2.0	Multiestructural
E3	B	2,5	Multiestructural	2.4	Multiestructural
E4	B	2,6	Multiestructural	2.2	Multiestructural
E5	E	2,4	Multiestructural	2.2	Multiestructural
E6	E	3,1	Relacional	3.6	Relacional
E7	G	3,0	Relacional	2.6	Multiestructural
E8	G	3,5	Relacional	3.0	Multiestructural
E9	G	3,7	Relacional	3.4	Relacional
E10	G	3,9	Relacional	3.6	Relacional

Finalmente, los estudiantes frente a la prueba de percepción manifestaron que en promedio se encontraban en un nivel cognitivo relacional y finalmente terminando la triangulación de los datos se define que en la capacidad cognitiva de realizar las diferentes transformaciones de las representaciones semióticas presentes en el caso solo dos estudiantes son relacionales E9 y E10. Por tanto de los diez estudiantes objeto de estudio solo el 30% lograron el nivel relacional aceptable para este nivel de formación. Se evidencia que el nivel de percepción de los estudiantes se encuentra sobrevalorado un nivel referente al nivel real en el que se encuentra. Así mismo, tan solo el 40% de los estudiantes lograron el modelo explicativo inicial.

4. Conclusiones

El uso de la contextualización de los problemas enfocados desde la Educación Matemática Realista, permite identificar los saberes previos de los estudiantes, permite definir la explicación conceptual a partir de estructuras mentales predefinidas y determinar la metacognición respecto a los fenómenos o situaciones, además, aporta al análisis de los niveles cognitivo de los estudiantes como un diagnóstico inicial de una temática objeto de enseñanza y aprendizaje.

La Taxonomía SOLO propuesta por Biggs y Collins permite diseñar, construir y validar instrumentos o rúbricas que permitan medir el nivel cognitivo de los estudiantes ante un tema específico. Su interrelación entre lo cuantitativo y cualitativo se convierte en una herramienta indispensable para los análisis metodológicos de enfoque mixto.

Se determinó que los niveles cognitivos basados en la percepción de los estudiantes están sobrevalorados un nivel en el 50% de los estudiantes, y que existe una correlación directa fuerte entre los niveles cognitivos determinados por la rúbrica y la capacidad de resolver problemas matematizados.

El nivel cognitivo de mayor complejidad en estudiantes universitarios se encuentra en promedio en el nivel multiestructural de acuerdo a la literatura científica y estudios realizados, datos que se comprueban en el estudio realizado donde el 60% de los estudiantes objeto de estudio se encontraron en un nivel multiestructural y tan solo el 30% en el nivel relacional.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 1(1), pp. 40-55.

Biggs, J. B., & Collins, K. F. (1982). Evaluating the Quality of Learning. The SOLO Taxonomy. London: Academic Press.

Bracho, R., Torralbo., Maz-Machado & Adamuz. (2014). Tendencias Temáticas de la Investigación en Educación Matemática en España. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28(50), 1077-1094.

Buteau, Ch., Marshall., Jarvis & Lavicza (2010). Integrating Computer Algebra Systems in Post-Secondary Mathematics Education: Preliminary Results of a Literature Review. Nipissing University, CANADA and University of Cambridge, UK. International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 17, No 2.

Depool, R.A. (2004). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS). Servicio de publicaciones. Universidad de la Laguna. España. I.S.B.N.: 84-7756-594-5. 242 p.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking: Basic issues for learning. In: F. Hitt & M. Santos. (eds), Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3-26.

Freudenthal H (1973) Mathematics as an educational task. Reidel Publishing, Dordrecht

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Gil, D. & Guzmán, M. (1993). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Tendencias e Innovaciones. OEI Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. ISBN 84-7884-092-3. 89 p.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 49-68), Jaén: SEIEM.

Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory, Journal of Curriulim Studies. 32:6, 777-796. DOI:10.1080/00220270050167170

Jiménez J.G. & Jiménez S. (2017). Geogebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad. Vol 4 No. 7. México. U. del Carmen. p. 13.

Orrgeo, M. Tamayo, O. Ruiz, F. (2016). Unidades didácticas para la enseñanza de las ciencias . Editorial Universidad Autonoma de Manizales. ISBN: 978-958-8730-88.2.

Rio, L. (2016). Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. Recuperado a patir de: https://www.researchgate.net/publication/308173172 DOI 10.18845/rdmei

Vanegas, C. (2013). Conflictos semióticos asociados con la noción de integral definida. Venezuela. Revista de Postgrado FACE-UC. Vol. 7 Nº 13. Julio-Diciembre 2013 / 481-492

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. S. Lerman (ed.), Encyclopedia of Mathematics Education, DOI 10.1007/978-94-007-4978-8. p. 521-534.

Zaranis, N. (2017). Does the use of information and communication technology through the use of realistic mathematics education help students to enhance their effectiveness in addition and subtraction? Pres and Prim Educ. 5(1), 46-62. doi:http://dx.doi.org/10.12681/ppej.9058